

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је $a = -1 + i\sqrt{3}$, $b = -1 - i\sqrt{3}$, $c = 2$ и n природан број који није дељив са 3. Одредити $a^n + b^n + c^n$.
2. Нека су \vec{m} и \vec{n} ненула вектори и $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 7\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{c} = \vec{m} - 4\vec{n}$, $\vec{d} = 7\vec{m} - 2\vec{n}$. Ако је $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{c} \perp \vec{d}$:
 - а) доказати да је $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;
 - б) одредити угао између вектора \vec{m} и \vec{n} .
3. Нека је a рационалан број већи од $\frac{4}{3}$. Ако је x реалан број такав да су $x^2 - ax$ и $x^3 - ax$ рационални бројеви, доказати да је x рационалан број.
4. Сваке две од кружница k_1 , k_2 и k_3 додирују се међусобно споља и свака од њих додирује кружницу k изнутра. Ако су O_1, O_2, O_3 и O центри кружница k_1, k_2, k_3 и k , редом, доказати да је O центар кружнице уписане у троугао $O_1O_2O_3$ ако и само ако кружнице k_1, k_2 и k_3 имају једнаке полупречнике.
5. Свака од машина А, Б и В може да прочита картицу на којој је уписан пар целих бројева (m, n) и да затим одштампа нову картицу. При томе,
 - (1) ако машина А учита картицу на којој је пар (m, n) , она штампа нову картицу са паром $(m - n, n)$;
 - (2) ако машина Б учита картицу на којој је пар (m, n) , она штампа нову картицу са паром $(m + n, n)$;
 - (3) ако машина В учита картицу на којој је пар (m, n) , она штампа нову картицу са паром (n, m) ;

На почетку је дата картица на којој је уписан пар $(19, 81)$. Да ли је могуће употребом ове три машине у произвољном поретку добити картицу на којој је уписан пар:

- а) $(7, 13)$;
- б) $(12, 21)$?

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.