Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су x, y, z реални бројеви такви да важи $x + y + z = 0$. Доказати да важи неједнакост

$$6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)^3.$$

2. Нека су $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такви да је $0 \leqslant k \leqslant n$. Доказати да важи

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} + \sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} = 2^{n+1}.$$

3. Знајући да важи

$$(4005 \cdot 6!)^3 = (5\,021\,004\,40a\,22b\,000\,000\,000\,000)_6,$$

одредити цифре a и b.
(За целе бројеве $0 \leqslant a_0, a_1, \ldots, a_k \leqslant 5$ ознака $(a_k \ldots a_1 a_0)_6$ представља запис броја у бази са основом 6.)

4. Тачка D унутар оштроуглог троугла ABC изабрана је тако да важи $AD = BD$. Нека је тачка E пресек правих CD и AB. Ако је $AE : EB = CD : CE$, доказати да је $CB = CE$.

5. У некој земљи живи коначно много становника. Сваки од њих воли бар једног и поштује бар једног становника (не обавезно истог). Познато је да:

(1) ако становник A воли становника B, онда сви становници који поштују становника A воле становника B;

(2) ако становник A поштује становника B, онда сви становници који воле становника A поштују становника B.

Доказати да постоји становник који воли себе.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.