

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Други разред – А категорија

1. Да ли постоје квадратне функције $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такве да је збир ма које две од њих квадратна функција која има бар једну реалну нулу, а збир све три квадратна функција која нема реалних нула?

2. Нека су AB и CD дужи дужине 1 које се секу у тачки O и при томе важи $\sphericalangle AOC = \frac{\pi}{3}$. Доказати да је

$$AC + BD \geq 1.$$

3. Одредити највећи заједнички делилац свих бројева из скупа

$$\{(n + 2014)^{n+2014} + n^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 2014^{2014}\}.$$

4. Нека је $A_1A_2A_3A_4A_5$ тетивни петоугао чији су сви унутрашњи углови тупи. Нека су S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 центри уписаних кружница троуглова $A_5A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$ и $A_4A_5A_1$, редом. Доказати да су сви унутрашњи углови петоугла $S_1S_2S_3S_4S_5$ тупи.

5. За становнике планете P , којих можда има и бесконачно много, важи следеће:

- (1) сваки становник воли тачно једног и поштује тачно једног становника;
- (2) ако становник A воли становника B , онда сви становници који поштују становника A воле становника B ;
- (3) ако становник A поштује становника B , онда сви становници који воле становника A поштују становника B ;
- (4) за сваког становника постоји неко ко га воли.

Да ли је обавезно тачно да сваки становник воли онога кога поштује? (Становник може поштовати или волети себе.)

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.