

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Четврти разред – Б категорија

1. Дати су комплексни бројеви

$$a = (i + 1) \cdot (i + 2) \cdot \dots \cdot (i + 2013) \text{ и } b = (i - 1) \cdot (i - 2) \cdot \dots \cdot (i - 2013).$$

Упоредити модуле ових бројева.

2. Одредити остатак при дељењу полинома

$$x^{2013} + x^{2010} + \dots + x^6 + x^3 + 8$$

полиномом $x^2 - x + 1$.

3. Одредити све четвороцифрене бројеве $n = \overline{abcd}$ такве да је $\frac{2n}{3}$ четвороцифрен број чије су цифре хиљада, стотина, десетица и јединица редом $b + 1$, $a + 1$, $d + 1$ и $c + 1$.

4. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC ($AB \neq AC$), а B_1 и C_1 редом подножја висина из темена B и C . Права ℓ , која садржи H и паралелна је са B_1C_1 , сече праву BC у тачки K и кружницу описану око троугла HB_1C_1 у тачки L ($L \neq H$). Кружнице описане око троуглова HB_1C_1 и ABC се секу у тачкама A и D . Ако права AH сече кружницу описану око троугла ABC у тачки E ($E \neq A$), доказати да тачке D, E, K, L леже на истој кружници.

5. За дате природне бројеве n и k , колико има уређених k -торки скупова (A_1, A_2, \dots, A_k) таквих да је

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq \{1, 2, \dots, n\}?$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.