Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина

$$\frac{3(x+1)}{\sqrt{x}} = a + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

има тачно једно решење у скупу реалних бројева.

2. Природан број m називамо *скоро бинарни* ако се може представити као збир различитих бројева из скупа

$$\{2^k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Од свих скоро бинарних бројева нека је N онај који је 2014^{2012}-ти по величини, почев од најмањег. Да ли је број $N - 2013$ скоро бинарни?

3. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC ($AB \neq AC$), а B_1 и C_1 редом подножја висина из темена B и C. Права ℓ, која садржи H и паралелна је са B_1C_1, сече праву BC у тачки K и кружницу описану око троугла HB_1C_1 у тачки L ($L \neq H$). Кружнице описане око троуглова HB_1C_1 и ABC се секу у тачкама A и D. Ако права AH сече кружницу описану око троугла ABC у тачки E ($E \neq A$), и ако је M средиште дужи BC, доказати да тачке D, E, K, L, M леже на истој кружници.

4. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 2$ за које постоји функција $f : \{0,1\}^n \to \{1,2,\ldots,n\}$ која задовољава:
Ако су $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ два низа из скупа $\{0,1\}^n$ таква да је $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n| = 2$, онда важи

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq f(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.