

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Трећи разред – А категорија

1. За скуп природних бројева A кажемо да је *скуп-интервал* ако постоје природни бројеви $a \leq b$ такви да је $A = \{i \in \mathbb{N} \mid a \leq i \leq b\}$. За дате природне бројеве n и k , колико има уређених k -торки скуп-интервала (A_1, A_2, \dots, A_k) таквих да је

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq \{1, 2, \dots, n\}?$$

2. Одредити највеће $c \in \mathbb{R}$ (или доказати да не постоји) за које је тачно следеће тврђење:
Ако је α нула полинома

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где су $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ такви да је $|a_0| = |a_1| = \dots = |a_n| > 0$, тада је $|\alpha| > c$.

3. За природан број кажемо да је *палиндром* ако се приликом читања његових цифара (у декадном запису) слева надесно и здесна налево добија исти број. Одредити све природне бројеве n за које је број n^k палиндром за сваки природан број k .
4. У оштроуглом троуглу ABC повучене су висине AA_1 , BB_1 и CC_1 . Тачке M и N на дужима A_1C_1 и C_1B_1 су такве да је

$$\sphericalangle MAA_1 = \sphericalangle NAC.$$

Доказати да је MA симетрала угла C_1MN .

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.