Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Други разред – А категорија

1. Нека је F фигура која одговара скупу тачака са координатама (b, c) (у правоуглом координатном систему) при чему су b и c такви реални бројеви да су модули оба решења квадратне једначине $x^2 + bx + c = 0$ не већи од 1. Одредити површину фигуре F.

2. У простору је дат бесконачан скуп S тачака међу којима не постоје три колинеарне. Сваке две тачке скупа S спојене су дужима, а свака дуж означена је са $+$ или $-$. При томе, скуп S има следећу особину: за свака два коначна дисјунктна подскупа $\{A_1, \ldots, A_m\}$ и $\{B_1, \ldots, B_n\}$ скупа S постоји тачка из S која је повезана дужима означеним са $+$ са свим тачкама $A_1, \ldots, A_m$, а дужима означеним са $-$ са свим тачкама $B_1, \ldots, B_n$.
Ако се обрише коначно много тачака скупа S, доказати да преостале и даље имају описану особину.

3. На столу се налази 2014 картица на којима редом пишу бројеви

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{2013}.$$

Аца и Бранко наизменично узимају по једну картицу са стола, а први картицу узима Аца. Након што је узета и последња картица, Аца израчуна збир бројева који се налазе на картицама које је он изабрао, а Бранко уради исто са својим картицама. Обележимо са A и B збирове који су добили Аца и Бранко, редом. Уколико је НЗД$(A, B) > 1$ победио је Аца, а у супротном је победио Бранко. Одредити који играч има победничку стратегију.

4. Нека су AD и BE висине, H ортоцентар и O центар описане кружнице оштроуглог троугла ABC. Ако је K ортоцентар троугла AOB, доказати да права HK полови дуж DE.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.