Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

16.03.2013.

Први разред – А категорија

1. Нека је $k>0$. На страницама A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 троугла $A_1B_1C_1$ уочене су тачке C_2, A_2 и B_2, редом, такве да је

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1}=\frac{B_1A_2}{A_2C_1}=\frac{C_1B_2}{B_2A_1}=k.$$

Даље, за свако $2\leqslant i\leqslant 2012$, на страницама A_iB_i, B_iC_i и C_iA_i троугла $A_iB_iC_i$ уочене су тачке C_{i+1}, A_{i+1} и B_{i+1}, редом, такве да је

$$\frac{A_iC_{i+1}}{C_{i+1}B_i}=\frac{B_iA_{i+1}}{A_{i+1}C_i}=\frac{C_iB_{i+1}}{B_{i+1}A_i}=\begin{cases} k, & i\equiv 1 \pmod 2\\ \frac{1}{k}, & i\equiv 0 \pmod 2\end{cases}.$$

Доказати да се праве A_1A_{2013}, B_1B_{2013} и C_1C_{2013} секу у једној тачки.

2. Нека је p прост број. Ако постоји $k\in\mathbb{N}$ такво да је

$$k^3+pk^2$$

потпун куб, доказати да $3\mid p-1$.

3. Нека су a, b, c и d реални бројеви за које важи $abcd=1$ и

$$a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Доказати да су нека два од бројева ab, ac, ad, bc, bd, cd једнака.

4. На 41 поље шаховске табле стављен је по један краљ. Доказати да се међу њима могу наћи три дисјунктна скупа таква да сваки садржи бар 5 краљева који се међусобно не нападају.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.