

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Први разред – Б категорија

1. Нека је  $O$  пресек дијагонала трапеца  $ABCD$  код кога је  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$  и тачка  $M$  средиште странице  $AB$ . Ако је  $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ , изразити векторе  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{MD}$ ,  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OM}$  преко  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

2. Функција  $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  дата је са

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x - 1)^2}.$$

Доказати да је  $f(x) = f(1 - x) = f(1/x)$ , за све  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

3. Доказати да не постоје природни бројеви  $a, b, c, d$  такви да је

$$9^a + 2^b + 2013^c = 2014^d.$$

4. У троуглу  $ABC$ , са најкраћом страницом  $BC$ , изабране су тачке  $P$  и  $Q$  на страницама  $AB$  и  $AC$ , редом, тако да је

$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle QBC = \sphericalangle BAC.$$

Доказати да центар  $O$  описане кружнице троугла  $APQ$  лежи на симетрали странице  $BC$ .

5. Колико има четвороцифрених бројева који садрже бар две цифре 5?

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.