

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Четврти разред – А категорија

1. Монични полином $p(x)$ степена $m + n$ има m -тоструку нулу a и n -тоструку нулу b , при чему је n паран и важи $a < b$. Доказати да у тачки

$$c = \frac{mb + na}{m + n}$$

функција $p(x)$ има локални максимум.
(Полином је моничан ако му је коефицијент уз моном највећег степена једнак 1.)

2. Бинарна операција $*$ дефинисана на скупу реалних бројева је таква да за све $a, b, c \in \mathbb{R}$ важи

$$(a * b) * c = a + b + c.$$

Доказати да је $a * b = a + b$.

3. Нека је x природан број. Доказати да се $x - 1$ и $x + 1$ могу представити у облику збира два квадрата целих бројева ако и само ако постоје цели бројеви u и v такви да је $u + v = 2x$ и $uv - 1$ потпун квадрат.
4. Нека су KL и MN тангенте на уписани круг ромба $ABCD$, где су K, L, M, N тачке на страницама AB, BC, CD, DA , редом. Доказати да је $KN \parallel LM$.
5. На колико начина се n нула и m јединица могу поређати у низ тако да се на тачно k места може уочити пар различитих суседних бројева?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.