

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су \vec{m} , \vec{n} , \vec{p} вектори такви да је $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $|\vec{p}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{p}) = \pi/3$, $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{p}) = \pi/2$. Ако је

$$\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{p}, \quad \vec{b} = \vec{m} - \vec{n} + 2\vec{p},$$

одредити $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$.

(Са $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ означен је угао између вектора \vec{u} и \vec{v} .)

2. Доказати да не постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in \left(\frac{2}{3}, 9 \right).$$

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$x! + 76 = y^2.$$

(Са $x!$ означен је број $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x$)

4. Доказати да произвољну тространу пирамиду можемо пресећи равни тако да се у пресеку добије ромб.

5. На контролној вежби сваки ученик добио је задатке једне од две групе задатака. Уколико одељење има 20 ученика, а по 10 ученика ради сваку групу задатака, на колико начина их дежурни наставник може поређати у два реда тако да ученици који су добили исту групу задатака седе један иза другог, а да ученици који седе један до другог раде различите групе задатака?

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.