

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Да ли постоји реалан број c такав да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\sin^{2n} x + c \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^{2n} x = 1?$$

2. Да ли постоји матрица A , чији су елементи комплексни бројеви, таква да за неке природне бројеве k и n важи

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } A^n = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}?$$

3. Одредити све природне бројеве n за које постоји делилац d броја $n^4 + 1$ такав да је $n^2 < d \leq n^2 + 3n + 7$.
4. Нека је ABC једнакокраки троугао ($AB = AC$) и нека је D тачка на страници BC таква да су полупречници круга уписаног у троугао ABD и круга приписаног страници CD троугла ACD једнаки. Доказати да су ови полупречници једнаки четвртини висине троугла ABC из темена B .
5. Нека су n и k природни бројеви и $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Одредити број уређених k -торки (A_1, A_2, \dots, A_k) подскупова скупа S чија је унија једнака S .

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.