Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Други разред – А категорија

1. Доказати да не постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in \left(\frac{2}{3}, 9\right).$$

2. Нека су m_a, m_b, m_c тежишне дужи и r_a, r_b, r_c полупречници одговарајућих споља приписаних кругова произвољног троугла ABC. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \leqslant \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}.$$

3. Да ли постоји природан број n тако да за сваку уређену петорку целих бројева $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ важи импликација

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = n \cdot x_5^4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0?$$

4. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека су P и Q тачке на страницама AB и AC, редом, такве да праве PQ и BC нису паралелне. Означимо са M и N средишта дужи BP и CQ, редом. Доказати да кружнице описане око $\triangle ABC$, $\triangle APQ$ и $\triangle AMN$ осим тачке A имају још једну заједничку тачку.

5. На неком скупу коме присуствује $n > 1$ људи учесници говоре на укупно $n-1$ различитих језика, при чему сваки учесник говори све језике. За које n је могуће да сваки учесник приликом поздрављања са осталим учесницима употреби свих $n-1$ језика? (Свака два учесника се поздрављају на тачно једном језику.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.