ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Први разред, Б категорија

1. Нека је M произвољна тачка у равни датог троугла ABC. Доказати да вектор $2 \cdot \overrightarrow{MA} - 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ не зависи од избора тачке M.

2. Четири ученика: Аца, Бора, Васа и Горан такмичили су се у трчању. После трке (на којој није било деобе места), на питање које је ко место заузео, одговорили су следеће:

- Аца: „Ја нисам био ни први ни последњи.”
- Бора: „Ја нисам био последњи.”
- Васа: „Ја сам био први.”
- Горан: „Ја сам био последњи.”

а) Да ли могуће да су сви одговори истинити?
б) Познато је да су 3 од ових одговора били истинити, а 1 неистинит. Ко је говорио неистину? За кога од њих са сигурношћу можете тврдити какав му је био поредак на циљу?

3. Доказати да за реалне бројеве $x \neq y \neq z \neq x$ важи

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 \neq 0.$$

4. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама P и Q. Права l која сече дуж PQ сече дате кружнице у тачкама A, B, C, D, при чему важи распоред $A - B - C - D$. Доказати да је

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD.$$

5. Шест мудраца је говорило о броју $n \in \mathbb{N}$ записаном у декадном запису.

Први: „Број n умањен за 1 је прост број акко n има бар један прост делилац из 1. десетице.”

Други: „Број n је дељив са 2 акко n није палиндром који има број цифара дељив са 2.”

Трећи: „Број n није дељив са 3 акко има мање од 3 непарна делиоца.”

Четврти: „Број n је дељив са 4 акко има тачно 4 цифре.”

Пети: „Број n није дељив са 5 акко је збир цифара броја n једнак 5.”

Шести: „Број n није узајамно прост са 6 акко има тачно 6 делилаца.”

Одредите све могуће природне бројеве n, ако се зна да је изјава сваког мудраца тачна.

(Број n је палиндром уколико је једнак броју који се добија читањем броја n са лева на десно. Нпр. број 1245421 је палиндром.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.