

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.**

Четврти разред, А категорија

1. Доказати да се прост број p може приказати у облику

$$p = \frac{n^4 - m^4}{n^3 + m^3},$$

за неке $n, m \in \mathbb{N}$, ако и само ако је p једнак збиру квадрата нека два узастопна природна броја.

2. Ако су $1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n = 0$ реални бројеви, одредити највећу могућу вредност суме

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1} (x_i - x_{i+1}).$$

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. На свакој од $2n$ карата записан је један од бројева 1 до $2n$ (сваки број на тачно једној карти). Карте су постављене на сто у једном реду, али у непознатом редоследу и окренуте лицем надоле. Милош и Аца играју следећу игру против њиховог другара Ђолета. Прво Милош и Ђоле приђу столу и окрену све карте. Пошто погледа распоред карата Милош може заменити места тачно две карте на столу (или их оставити у датом редоследу). Затим се све карте поново окрену лицем надоле, а столу прилази Аца. Ђоле каже било који број од 1 до $2n$, а Аца окреће карте како би пронашао карту са тим бројем. Милош и Аца побеђују ако Аца нађе тражену карту у највише n покушаја, а иначе побеђује Ђоле. Ко има победничку стратегију?
(Милош и Аца се могу договарати само пре почетка игре.)

4. Доказати да површина четвороугла са страницама a, b, c, d , тим редом, није већа од

$$\frac{1}{4} \cdot ((a + c)^2 + bd).$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.