

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.**

**Трећи разред, А категорија**

1. Доказати да је број  $\operatorname{tg} \left( 17^{3^{2012}} \right)^\circ$  ирационалан.
2. Нека су  $a$  и  $b$  природни бројеви. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева  $n$  таквих да је за сваки прост број  $p$  број  $a \cdot p^n + b$  сложен.
3. Нека су  $M$  и  $N$  тачке на страници  $BC$  троугла  $ABC$  такве да важи распоред  $B - M - N$  и да је  $BM = CN$ . Тачке  $P$  и  $Q$  изабране су на дужима  $AN$  и  $AM$ , редом, тако да је  $\sphericalangle PMC = \sphericalangle MAB$  и  $\sphericalangle QNB = \sphericalangle NAC$ . Доказати да је

$$\sphericalangle QBC = \sphericalangle PCB.$$

4. За коначан непразан скуп  $S$  природних бројева дефинишемо

$$r(S) = \max(S) - \min(S)$$

(разлика највећег и најмањег елемента скупа  $S$ ). Ако је  $A$  скуп од 30 различитих природних бројева, колико највише различитих вредности може имати  $r(S)$  за све могуће петочлане подскупове  $S$  скупа  $A$  (тј. колико највише елемената може имати скуп  $\{r(S) \mid S \subseteq A \wedge |S| = 5\}$ )?

Време за рад 240 минута.  
Сваки задатак вреди 25 поена.