

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Други разред, А категорија

1. На табли је записана једначина

$$\sqrt{*x^2 + *x + *} = *x + *.$$

Два играча, Мирко и Славко, наизменично уместо једне од преосталих звездица уписују цео број. Мирко игра први. Он добија игру уколико добијена једначина има бар једно решење у скупу рационалних бројева, док у супротном игру добија Славко. Који од играча има победничку стратегију?

2. Нека су D, E, F подножја висина из темена A, B, C , редом, оштроуглог троугла ABC који није једнакокрак. Права EF сече праву BC у тачки P , док права кроз D паралелна са EF сече странице AB и AC у тачкама Q и R , редом. Доказати да једна пресечна тачка описаних кружница троуглова DEF и PQR лежи на страници BC .

3. Наћи сва решења (p, q, a, m) једначине

$$p^2 + 4^a q^2 = m^2,$$

таква да су p и q прости бројеви и $a, m \in \mathbb{N}$.

4. Перица је на папиру нацртао $n \geq 2$ тачака које припадају истој кружници и дуж између сваке две тачке. Притом, сваку од тих дужи означао је или са $+$ или са $-$. Доказати да, без обзира на начин на који су дужи означене, Марица може избрисати све дужи означене једним знаком и неке дужи означене другим знаком, тако да важе следећа два услова:

- 1) неизбрисане дужи немају заједничких тачака у унутрашњости кружнице и
- 2) сваке две тачке повезане су изломљеном линијом састављеном од једне или више неизбрисаних дужи.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.