

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.**

Први разред, А категорија

1. Нека је $D \in BC$ подножје висине из темена A оштроуглог троугла ABC . На дужи AD уочена је тачка P таква да је $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCA$. Доказати да је троугао ABC једнакокрак или је тачка P ортоцентар троугла ABC .

2. Познато је да за неке природне бројеве x и y важи

$$23^x \cdot 111^y = \overline{aab3dc6902b2c74d456b},$$

где су $a \neq 0, b, c, d$ неке (не обавезно различите) цифре. Наћи $a+b+c+d$.

3. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима, такав да за сваки природан број n број $P(P(n))$ при дељењу са n даје остатак $n-1$. Доказати да полином $P(x)$ нема целобројну нулу.

4. Главни град неке државе спојен је са преосталих 2012 градова авиолинијама. Сваки од преосталих градова спојен је авиолинијом бар са још једним градом осим главног. Доказати да је могуће укинути 1006 авиолинија из главног града тако да је и даље могуће стићи из сваког града до сваког другог коришћењем неких авиолинија.
(Све авиолиније су двосмерне.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.