ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Четврти разред, А категорија

1. Дате су тачке $A(1,3)$ и $B(2,4)$. Одредити тачку C на параболи $x = y^2 + 1$ за коју троугао ABC има најмању могућу површину.

2. Нека је $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција и $f(1) = 0$. Колики је најмањи могући број решења једначине

$$2 \cdot f(x) = f'(x) \cdot \sin 2x\,?$$

3. а) Доказати да не постоје прости бројеви p и q такви да је број

$$p^2 + 2012pq + q^2$$

потпун квадрат.

б) Доказати да постоји бесконачно много парова узајамно простих природних бројева (m, n), тако да је

$$m^2 + 2012mn + n^2$$

потпун квадрат.

4. Нека је M унутрашња тачка квадрата $ABCD$. Нека су A_1, B_1, C_1, D_1 друге тачке пресека правих AM, BM, CM, DM са описаном кружницом квадрата $ABCD$, редом. Доказати да је

$$A_1B_1 \cdot C_1D_1 = A_1D_1 \cdot B_1C_1.$$

5. Нека је $m \geqslant 3$ природан број. Наћи најмањи природан број $r(m)$ за који важи да се за свако разбијање скупа $\{1, 2, \ldots, r(m)\}$ на 2 подскупа из једног од њих може изабрати m бројева (не обавезно различитих) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ за које важи

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = x_m.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.