

**ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.**

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\frac{2^x - 16}{(9^{2x+1} - 243) \cdot \sqrt{5 \frac{x^2-3}{2}} - 125} \leq 0.$$

2. Нека је $n > 2$ природан број. Доказати да је вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 3 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

једнака квадрату целог броја.

3. Низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ је дефинисан са $a_0 = 1$ и

$$a_{n+1} = (n^2 + 1) \cdot a_n - n,$$

за $n \geq 0$. Доказати да постоји члан низа који је дељив са 2011.

4. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао такав да за сваку тачку M која је у равни тог шестоугла важи

$$MA^2 + MC^2 + ME^2 = MB^2 + MD^2 + MF^2.$$

Доказати да се тежишта троуглова ACE и BDF поклапају.

5. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Колико се највише непразних подскупова може издвојити из скупа од n елемената тако да су свака два или дисјунктна или је један од њих подскуп другог?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.