

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25.02.2012.

Први разред – Б категорија

1. Нека су  $AB$  и  $CD$  паралелне и нека је  $E$  пресечна тачка правих  $AD$  и  $BC$ . Доказати да се описане кружнице троуглова  $ABE$  и  $CDE$  додирују.

2. Ако за све  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  важи  $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ , одредити  $f(2)$ .

3. Колико решења има једначина

$$(3p + q^2)r = 2010$$

у скупу простих бројева?

4. Нека је  $O$  средиште дужи  $AB$ , а  $E$  произвољна тачка дужи  $AB$ . Нека  $C$  и  $D$  припадају кружници над пречником  $AB$ , тако да су обе са исте стране праве  $AB$  и важи  $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BED$ . Доказати да је четвороугао  $CEOD$  тетиван.

5. На турниру је учествовало  $n < 10$  играча. Сваки играч је играо са сваким тачно једном. За победу играч добија 1 поен, а за пораз 0 поена. Свака утакмица се завршила победом једног од играча.

Након одиграног турнира испоставило се да је тачно један играч имао непаран број поена и да је био пласиран на четврто место. Колико је играча учествовало на турниру?

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.