

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25.02.2012.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ које задовољавају услов

$$|f(x)| \leq 2011 \leq \left| \frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} \right|$$

за све различите $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Нека је $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и диференцијабилна и нека за свако $x \in (0, \infty)$ важи $f(x) \cdot f'(x) \geq \cos x$. Доказати да $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ не постоји.

3. У скупу целих бројева решити једначину

$$x^{2012} - 2010 = 4y^{2012} + 4y^{2011} + 2011y.$$

4. Нека су R и r полупречници описане и уписане кружнице троугла ABC , редом. Кружница k_a изнутра додирује описану кружницу у тачки A , а споља додирује уписану кружницу троугла ABC . Аналогно су дефинисане k_b и k_c . Нека су r_a, r_b, r_c полупречници кружница k_a, k_b, k_c , редом. Доказати да важи

$$\frac{R - r_a}{r + 4r_a} + \frac{R - r_b}{r + 4r_b} + \frac{R - r_c}{r + 4r_c} \geq \frac{3R}{4r}.$$

Одредити када се достиже једнакост у претходној неједнакости.

5. Одредити све парове (m, n) природних бројева, тако да је $3 \leq n \leq m$ и постоји табла димензија $m \times n$ таква да важи:

1° у свако поље табле уписан је цео број;

2° збир бројева у било ком квадрату 2×2 ове табле је негативан;

3° збир бројева у било ком квадрату 3×3 ове табле је позитиван.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.