

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25.02.2012.

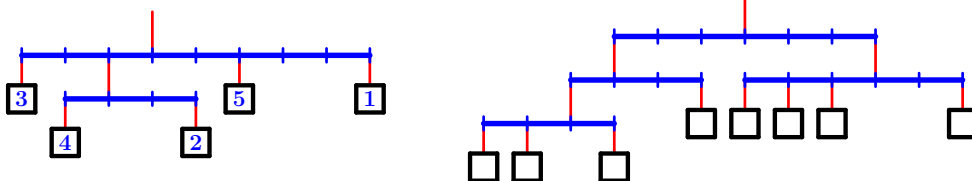
Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати $\frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$.
2. Ако је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ и $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$,
доказати да су вектори $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ колинеарни.
3. Решити систем једначина $2 \cdot 5^{1-y} = \log_3(x^{-2})$, $5^y + \log_3 x = 4$.
4. Пресек правилне четворостране призме и равни која пролази кроз њен врх је ромб са оштрим углом α . Одредити нагибни угао те равни према равни основе призме.

5. Тегови различитих маса струнама су закачени за летвице. Маса летвице и маса струне се занемарују, па се под масом летвице сматра збир маса окачених тегова. Летвице се могу струнама причвршћивати за друге летвице при чему се тачка у којој струна држи закачену летвицу назива ослонац. Закачена летвица се третира као тег. Све тачке летвице у којима су закачени тегови су на целобројним растојањима од ослонца те летвице.

Момент тега је производ његове тежине и растојања од ослонца летвице на којој се налази. Хоризонталан положај летвице означава једнакост момената оптерећења на обе стране у односу на ослонац те летвице, при чему је моменат оптерећења сваке стране летвице једнак збиру момената тегова.

Тежине тегова су различити природни бројеви $1, 2, 3, \dots, n$, при чему је n укупан број тегова. Систем тегова са наредне слике лево (ту је $n = 5$) има обе хоризонталне летвице, јер за горњу важи једнакост $3 \cdot 3 + (4 + 2) \cdot 1 = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 5$, а за доњу важи $4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$. За систем тегова са слике десно одредити масе тегова, тј. на тегове треба уписати по један од бројева $1, 2, 3, \dots, 8$. Да ли је решење јединствено?



Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.