

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 25.02.2012.

Трећи разред, А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је полином $P(x) = x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1$ дељив полиномом $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Нека је n природан број. Наћи вредност детерминанте реда n

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Која од једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2011$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 2011$ има више решења у скупу целих бројева?

4. На продужетку странице AC преко темена C троугла ABC ($AB > AC$) дата је тачка B_1 тако да важи $AB = AB_1$. Симетрала $\sphericalangle BAC$ сече праву BC у тачки D . Кружница описана око троугла B_1CD сече кружницу описану око троугла ABC у тачки E , $E \neq C$. Доказати да је тангента кружнице описане око троугла B_1CD у тачки E паралелна страници AC .

5. За које $n \in \mathbb{N}$ је могуће формирати релацију пријатељства (релација пријатељства је симетрична) на скупу од n људи, тако да сваки човек има тачно 3 познаника?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.