

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**  
**УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.**

**Четврти разред, А категорија**

1. Раван је обојена са 2 боје. Доказати да постоји једнакостраничан троугао странице 1 cm или странице  $\sqrt{3}$  cm, код кога су сва 3 темена обојена истом бојом.

Показати да не мора да постоји и једнакостраничан троугао странице 1 cm код кога су сва 3 темена обојена истом бојом и једнакостраничан троугао странице  $\sqrt{3}$  cm код кога су сва 3 темена обојена истом бојом.

2. Нека је  $k$  кружница описана око оштроуглог троугла  $ABC$ , а тачка  $D$  дијаметрално супротна тачки  $A$  на  $k$ . Тангента у  $A$  на  $k$  и права  $BC$  секу се у тачки  $P$ , а права  $DP$  поново пресеца  $k$  у тачки  $Q$ . Нека су  $M$  и  $N$ , редом, средине страница  $AB$  и  $AC$ . Ако је  $Q'$  тачка на  $k$  таква да је  $QQ' \parallel BC$ , а  $X$  пресечна тачка дужи  $AQ'$  и  $MN$ , доказати да је  $BX = CX$ .
3. У зависности од непарног природног броја  $n > 1$ , одредити остатак при дељењу броја

$$a = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,n)=1}} i$$

бројем  $n$ .

4. Нека је дат коначан скуп реалних бројева с особином да се сваки његов елемент може записати као збир неких двају елемената (не обавезно различитих) из истог скупа. За такав скуп кажемо да је *безбедности реда  $n$*  ако не садржи подскуп са  $n$  или мање елемената чији је укупан збир једнак 0. Доказати да постоји скуп произвољно великог (унапред датог) реда безбедности.

Време за рад 240 минута.

Сваки задатак вреди 25 поена.

Сваки задатак писати на засебном листу.