

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**  
**УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.**

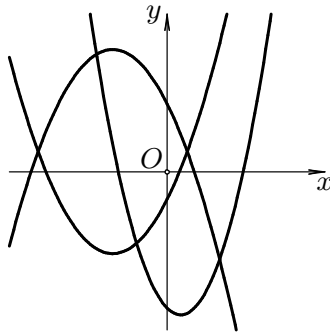
**Други разред, Б категорија**

1. Доказати да у сваком правоуглом троуглу важи

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2},$$

где су  $a$  и  $b$  дужине катета, а  $h$  дужина хипотенузине висине.

2. На слици су скицирани графици три квадратне функције.



Да ли постоје реални бројеви  $a$ ,  $b$  и  $c$  тако да су на њој приказани графици функција  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $y = bx^2 + cx + a$  и  $y = cx^2 + ax + b$ ?

3. За комплексан број  $z$  важи  $\left| \frac{z+i}{1+z} \right| = 1$ . Доказати да је

$$\left| z^{2010} + iz^{2009} + \dots + i^{2009}z + i^{2010} \right| = \left| z^{2010} + z^{2009} + \dots + z + 1 \right|.$$

4. На колико начина се могу поставити бели и црни скакач на шаховску таблу димензија  $8 \times 8$  тако да се међусобно не нападају?
5. Перица има 1012 налепница на којима се налазе бројеви 1000, 1001, ..., 2011 (сваки број се налази на једној налепници). Он жели да залепи налепнице (не нужно све) у низ (једну иза друге) тако да добије највећи могући број који је дељив са 99 (ако употреби  $k$  налепница, добија број који има укупно  $4k$  цифара). Како Перица треба да залепи налепнице да би остварио свој циљ?

Време за рад 240 минута.

Сваки задатак вреди 20 поена.

Сваки задатак писати на засебном листу.