ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да је број $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ дељив са 56 за сваки природан број n.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$2\log_{\frac{1}{2}}\left(4^{\sqrt{x^2-1}} - 1\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(4^{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2}\right) \geqslant -1.$$

3. Дат је четвороугао $ABCD$. Нека је $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$, $\sphericalangle CDA = \delta$ и P површина четвороугла $ABCD$.

а) Доказати да је

$$16P^2 + \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cdot \cos(\beta + \delta).$$

б) Нека је $A'B'C'D'$ тетиван четвороугао коме су дужине страница a, b, c и d. Доказати да је површина четвроугла $A'B'C'D'$ барем P.

4. Тачке које одговарају комплексним бројевима a, b, c, a^2, b^2 и c^2 (у неком поретку) чине темена правилног шестоугла чији је центар уписане кружнице тачка која одговара броју 0. Доказати да је $abc = -1$.

5. 40 разбојника скрива своје благо у 2011 пећина које су нумерисане бројевима 1 до 5. Преко дана они остављају благо у једној од ових пећина, а ноћу га премештају у једну од суседних пећина (ако је благо у пећини са бројем k, $1 < k < 5$, премешта се у пећину са бројем $k-1$ или у пећину са бројем $k+1$; ако је у пећини са бројем 1, онда се премешта у пећину са бројем 2; ако је у пећини са бројем 5, онда се премешта у пећину са бројем 4). Али Баба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Али Баба има стратегију којом са сигурношћу може (у коначно много покушаја) да пронађе благо?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.