ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Трећи разред, А категорија

1. Нека су $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ нуле полинома $1+x+x^2+...+x^n$. Пронаћи најмањи природан број m такав да тачке $a_1^m,\ a_2^m, \ldots,\ a_n^m$ у комплексној равни леже на истој правој, ако је:

а) $n = 2011$;

б) $n = 2010$.

2. Матрица 2011×2011 се зове *златна* ако је попуњена бројевима 1, 2, 3, 4 и ако се у сваком квадрату 2×2 сваки од бројева 1, 2, 3, 4 појављује тачно једном. Одредити укупан број златних матрица.

3. Одредити најмањи природан број m такав да се бројеви $1^m,\ 2^m,\ \ldots,\ 2010^m$ могу поређати на кружници на такав начин да је збир свака два суседна броја са кружнице дељив са 2011.

4. Нека је D подножје висине из темена A оштроуглог $\triangle ABC$. Уочимо тачке E и F на страници BC такве да је $BD = CE$ и $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAF$. Нека је Q друга пресечна тачка праве AF и круга описаног око $\triangle ABC$. Ако су M и N, редом, средине страница AB и AC, доказати да се кругови описани око $\triangle ABC$ и $\triangle MNQ$ додирују.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.