ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Други разред, А категорија

1. Дат је оштроугли троугао ABC са ортоцентром H и центром описаног круга O. Нека симетрала дужи AH сече странице AB и AC у тачкама D и E, редом. Доказати да је A центар спољa приписане кружнице троугла ODE.

2. За природан број k, обележимо са $S(k)$ збир цифара броја k. Да ли постоји природан број n за који важи

$$S(n+1)\cdot S(n+2)\cdot ...\cdot S(n+2010)\cdot S(n+2011)=S(n)^{2011}\,?$$

3. Одредити све вредности реалног параметра t тако да систем једначина

$$\begin{aligned} x+y+z+v &= 0 \\ xy+yz+zv+t(xz+xv+yv) &= 0 \end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

4. 40 разбојника скрива своје благо у 2011 пећина које су нумерисане бројевима $1, 2, \ldots, 2011$. Преко дана они остављају благо у једној од ових пећина, а ноћу га премештају у једну од суседних пећина (ако је благо у пећини са бројем k, $1 < k < 2011$, премешта се у пећину са бројем $k-1$ или у пећину са бројем $k+1$; ако је у пећини са бројем 1, онда се премешта у пећину са бројем 2; ако је у пећини са бројем 2011, онда се премешта у пећину са бројем 2010). Али Баба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Али Баба има стратегију којом са сигурношћу може (у коначно много покушаја) да пронађе благо?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.