ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Први разред, А категорија

1. Перица покушава да пронађе $2n+1$ најмањих узастопних природних бројева, тако да је збир квадрата најмањих $n+1$ бројева једнак збиру квадрата највећих n бројева. Уколико пронађе такве бројеве, Перица их записује у $n-$ту врсту своје *пирамиде*, а уколико такви не постоје, $n-$та врста остаје празна. Након прва три корака ($n=1$, $n=2$ и $n=3$) Перицина пирамида има следећи изглед

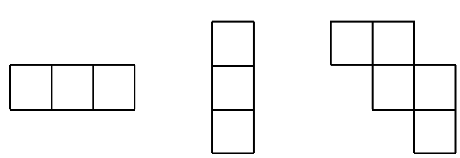
$$\begin{aligned} 3^2+4^2 &= 5^2 \\ 10^2+11^2+12^2 &= 13^2+14^2 \\ 21^2+22^2+23^2+24^2 &= 25^2+26^2+27^2. \end{aligned}$$

Кажемо да се бројеви 3, 4 и 5 налазе у првој врсти; бројеви 10, 11, 12, 13 и 14 се налазе у другој врсти; бројеви 21, 22, 23, 24, 25, 26 и 27 се налазе у трећој врсти. Уколико Перица настави са прављењем пирамиде на описани начин, да ли ће се у некој врсти наћи број 2011?

2. Нека су H и O редом ортоцентар и центар описане кружнице троугла ABC ($AB \neq AC$). Праве AH и AO секу описану кружницу троугла ABC по други пут у тачкама M и N, редом. Означимо са P, Q, R пресечне тачке правих BC и HN, BC и OM, HQ и OP, редом. Доказати да је четвороугао $AORH$ паралелограм.

3. За природан број кажемо да је *симетричан* ако се у декадном систему исто пише са лева на десно и са десна на лево. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да су бројеви n^2, n^3 и n^4 симетрични, а број n^5 није симетричан.

4. За које природне бројеве m и n се правоугаоник димензија $m \times n$ може поплочати (без преклапања) фигурама састављених од јединичних квадрата као на слици? Фигуре се не могу ротирати или окретати.



Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Сваки задатак писати на засебном листу.