ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Четврти разред, А категорија

1. У троуглу ABC важи:

(1) $DE \parallel AB$, $D \in AC$ и $E \in BC$;

(2) $DF \parallel CB$, $F \in AB$;

(3) $AE \cap DF = \{G\}$ и $CF \cap DE = \{H\}$.

Доказати да је $GH \parallel AC$.

2. Дата је табла димензија 3×4. Два играча наизменично постављају домине на поља табле (свака домина поставља се на два поља) које се не смеју преклапати. Победник је играч који постави последњу домину.

(а) На колико различитих начина се могу поставити две домине?

(б) Колико има различитих позиција након постављене две домине?

(в) Који од играча има добитну стратегију?

(Домине су правоугаоници димензија 1×2. Играчи на располагању имају довољан број домина.)

3. Дато је n тачака x_1, $x_2, \ldots,$ x_n на сегменту $[0, 1]$. Доказати да постоји тачка $x \in [0, 1]$ тако да је просечно растојање од тачке x до тачака x_1, $x_2, \ldots,$ x_n једнако $\dfrac{1}{2}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Дати су произвољни позитивни бројеви $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_{2n}$ и њихова произвољна пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$. Доказати да за свако $t \geqslant 0$ важи неједнакост

$$(a_1a_2 + t)(a_3a_4 + t) \cdot \ldots \cdot (a_{2n-1}a_{2n} + t) \leqslant (b_1b_2 + t)(b_3b_4 + t) \cdot \ldots \cdot (b_{2n-1}b_{2n} + t).$$

5. Нека су p и q прости бројеви, при чему је $p = 2q + 1$. Одредити (ако постоји) најмањи природан број n такав да важи

$$p \mid q^n + n^q.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.