ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Трећи разред, А категорија

1. На страници AD правоугаоника $ABCD$ $(AB < BC)$ изабрана је тачка E тако да је $BE = BC$. Нормала из темена C на дијагоналу BD сече продужетак странице AB у тачки F. Доказати да је троугао BEF правоугли.

2. Који је највећи број жетона који се могу поставити на шаховску таблу димензија 2012×2012 (на свако поље се поставља највише један жетон) тако да на свакој хоризонтали, вертикали и дијагонали ове табле буде паран број жетона?
(Под дијагоналом шаховске табле подразумевамо низ поља табле чији центри леже на правој која је паралелна са једном од две дијагонале квадрата који чини границу табле.)

3. Нека је P раван. Доказати да не постоји пресликавање $f : P \to P$ такво да за сваки конвексан четвороугао $ABCD$ равни P, тачке $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ и $f(D)$ чине темена конкавног четвороугла.
(Величине углова четвороугла су различите од $180°$.)

4. Нека је $A = (2011 + i)^{2010} + (2011 - i)^{2010}$.

(а) Доказати да је A цео број.

(б) Одредити остатак при дељењу броја A са 101.

5. Низ $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ реалних бројева задовољава $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и

$$2a_n + 3a_{n+2} \leqslant 5a_{n+1}, \text{ за све } n \geqslant 0.$$

Доказати да за све $n \geqslant 0$ важи

$$a_n \leqslant 3 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.