ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Четврти разред, А категорија

1. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама M и N, при чему је центар кружнице k_2 на кружници k_1. Нека је P произвољна тачка на луку MN кружнице k_2 који се налази унутар круга k_1. Праве MP и NP секу k_1 по други пут у тачкама A и B, редом. Нека је S средиште дужи AB, а тачке C и D пресеци полуправе SP са кругом k_1 и k_2, редом (различити од P). Доказати да је $PC = CD$.

2. Нека је p непаран прост број. Доказати да је

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{k^3}{p} \right] = \frac{(p-2)(p-1)(p+1)}{4}.$$

3. За сваки природан број n, нека је a_n број нула којима се завршава бинарни запис броја n (на пример, $a_5 = 0$, јер је 101 бинарни запис броја 5; $a_{20} = 2$, јер је 10100 бинарни запис броја 20). Нека је $b_n = 1$ ако је a_n непаран број, а иначе нека је $b_n = 0$. Испитати да ли је број $x = 0,b_1b_2b_3\ldots$ рационалан (запис броја x је у бинарном систему).

4. Доказати да је $2\cos\dfrac{p\pi}{9}$ корен полинома $x^3 - 3x - 1$ за сваки прост број $p > 3$.

5. Да ли се раван може обојити у 2010 боја тако да свака кружница садржи тачке свих боја?

(Свака тачка равни обојена је тачно једном бојом.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.