

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Четврти разред, Б категорија

1. За које вредности реалног параметра a једначина

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \cdot \log_{\frac{1}{a}} a$$

има решења?

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\left(5\sqrt{2} - 7\right)^x + 2 \leq 5 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^x.$$

3. Одредити највећи могући количник запремине лопте и запремине купе описане око те лопте.
4. Две параболе, чије су директрисе међусобно нормалне, имају четири различите заједничке тачке, A_1, A_2, A_3, A_4 . Доказати да тачке A_1, A_2, A_3, A_4 припадају једној кружности.
5. У конвексном петоуглу $ABCDE$ углови код темена B и E су прави и важи $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EAD$. Ако се праве BD и CE секу у тачки O , доказати да су праве AO и BE ортогоналне.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.