

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Први разред, Б категорија

1. Нека је  $f(x) = -\frac{2x+7}{x+3}$  и  $f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n\text{-пута}}$ , за  $n \in \mathbb{N}$ . Одредити  $f_{2009}(2010)$ .
2. На колико се начина број 2010 може представити као збир неколико (бар два) узастопних природних бројева?
3. Ако је  $a, b > 0$  и  $a + b = 2$ , доказати да је
$$\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} < 3.$$
4. У  $\triangle ABC$  угао код темена  $B$  је двоструко већи од угла код темена  $A$ , а тежишна дуж  $CM$  је нормална на симетралу  $\triangle ABC$ . Одреди углове  $\triangle ABC$ .
5. Симетрале  $AA_1, BB_1, CC_1$  углова  $\triangle ABC$  секу се у тачки  $S$  ( $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$ ). Ако су полупречници кружница уписаных у троуглове  $SAB_1, SB_1C, SCA_1, SA_1B, SBC_1, SC_1A$  једнаки, доказати да је  $\triangle ABC$  једнакостраничан.

Време за рад 240 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.