

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Други разред, А категорија

1. Нека у конвексном петоуглу $ABCDE$ важи $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ$ и $\sphericalangle BDC = \sphericalangle DAE$. Нека су M, N и P , редом, средишта дужи AD, BD и EC . Доказати да је $\sphericalangle MPN = 90^\circ$.

2. Да ли у низу

$$21, 2011, 200111, 20001111, \dots, 2 \underbrace{0 \dots 0}_{2009} \underbrace{1 \dots 1}_{2010}$$

има више простих или сложених бројева?

3. Доказати да је $\sin \left(24 \arcsin \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{6 + 3\sqrt{2}}}{4} \right) = 0$.

4. Колико има уређених тројки $(a, b, c) \in \{1, 2, \dots, 2010\}^3$ таквих да за сваки природан број n једначина

$$(a + n)x^2 + (b + 2n)x + (c + n) = 0$$

има бар једно реално решење?

5. На сваком пољу шаховске табле написан је по један број између 1 и 64 (сваки број тачно једном). Са колико најмање питања се може сазнати тачан распоред бројева (тј. сазнати који је број у ком пољу), ако се једним питањем може сазнати који су бројеви написани у произвољно одабраном скупу поља (али не и њихов распоред у тим пољима)?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.