ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Трећи разред, А категорија

1. У $\triangle ABC$ тачке M и N су пресеци тежишне дужи и симетрале унутрашњег угла из темена A са страницом BC, редом. Тачке Q и P су тачке пресека нормале у N на NA са правама MA и BA, редом, а тачка O је пресек нормале у P на AB са правом AN. Доказати да је $QO \perp BC$.

2. Нека је са $\overline{a_n b_n}$ означен двоцифрени број који представља последње две цифре броја $1^{2010} + 2^{2010} + \ldots + n^{2010}$, за $n \in \mathbb{N}$ (у декадном запису). Одредити да ли је број $0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$ рационалан.

3. Колико решења има функционална једначина

$$f(n) + f(n + f(n)) = n$$

ако:

(а) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$; **(б)** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$?

4. Нека је низ $(f_n)_{n \geqslant 1}$ дефинисан са $f_1 = 1, f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \in \mathbb{N}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ уредити бројеве $f_k f_{n-k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ у неопадајући низ.

5. На табли је записан систем

$$\begin{array}{ccccccccc} \star\, x_1 & + & \star\, x_2 & + & \ldots & + & \star\, x_{2010} & = & \star \\ \star\, x_1 & + & \star\, x_2 & + & \ldots & + & \star\, x_{2010} & = & \star \\ & & & & \vdots & & & & \\ \star\, x_1 & + & \star\, x_2 & + & \ldots & + & \star\, x_{2010} & = & \star \end{array}$$

који садржи 2010 једначина. Аца и Бранко, наизменично, уместо једне звездице уписују реалан број по избору. Аца игра први. Који од играча има победничку стратегију ако:

(а) Аца побеђује у случају да систем има бесконачно много решења, а Бранко у случају да је противречан;

(б) Аца побеђује у случају да је систем противречан, а Бранко у случају да систем има бесконачно много решења?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.