

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Трећи разред, Б категорија

1. Две стране троугла припадају правим $3x + 5y - 14 = 0$ и $x + 3y - 5 = 0$, а ортоцентар тог троугла је $H(1, 1)$. Одредити једначину праве којој припада трећа страница троугла.

2. Одредити (ако постоји) најмањи природан број n такав да је

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sin n^\circ} + \frac{\sqrt{3} + 1}{\cos n^\circ} = 4\sqrt{2}.$$

3. Нека је $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 + 1| = |z + i|\}$. Доказати да за произвољне $z_1, z_2 \in S$ важи $|z_1 - z_2| \leq 3$. Испитати када се достиже једнакост.

4. Нека је са $\overline{a_n b_n}$ означен двоцифрени број који представља последње две цифре броја $1 + 2 + \dots + n$, за $n \in \mathbb{N}$ (у декадном запису). Одредити да ли је број $0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$ рационалан.

5. Нека је S скуп тачака у равни, такав да за сваке две тачке $A, B \in S$ постоји тачка $C \in S$ на кружници чији је пречник AB , различита од тачака A и B . Доказати да је скуп S бесконачан.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.