

**ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**  
**УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.**

**Четврти разред, Б категорија**

1. Збир два позитивна броја једнак је  $c$  ( $c > 0$ ). Колики је највећи могући производ куба првог и квадрата другог броја?
2. Ако је  $r$  полупречник основе и  $H$  висина праве кружне купе, а  $\rho$  полупречник сфере уписане у ту купу, доказати да важи  $\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{\rho H}$ .
3. Доказати да је  $\frac{\pi}{\arctg \frac{1}{\sqrt{27}} + \arcsin \sqrt{\frac{3}{28}}}$  природан број.
4. Нека су  $z_1$  и  $z_2$  међусобно различити комплексни бројеви, такви да је  $z_1 z_2 \neq 0$ .
  - (а) Ако је  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ , доказати да тачке одређене комплексним бројевима  $0, z_1$  и  $z_2$  чине темена правоуглог троугла.
  - (б) Ако тачке одређене комплексним бројевима  $0, z_1$  и  $z_2$  чине темена правоуглог троугла мора ли бити  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ ?
5. Пет студената, Аца, Беба, Весна, Гоца и Доки су одговарали на тест који се састоји од 5 питања са вишеструким одговорима. Прва два питања су имала одговоре  $a, b$  и  $c$ , док је на остала одговор тачно–нетачно ( $\perp$ – $\top$ ). Одговор на свако од питања је јединствен. Они су одговорили на питања на следећи начин:

	I	II	III	IV	V
Аца	$a$	$a$	$\top$	$\top$	$\top$
Беба	$b$	$b$	$\top$	$\perp$	$\top$
Весна	$a$	$b$	$\top$	$\top$	$\perp$
Гоца	$b$	$c$	$\top$	$\top$	$\perp$
Доки	$c$	$a$	$\perp$	$\top$	$\top$

Испоставило се да не постоје два студента који имају једнак број тачних одговора.

- (а) Доказати да ниједан од студената нема све тачне одговоре.
- (б) Доказати да одговори на треће и четврто питање нису исти.

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.