ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Четврти разред, А категорија

1. Доказати да је природан број $n \geqslant 4$ прост ако и само ако $n \mid \sum_{k=1}^{n-3}(k \cdot k!)$.

2. За реалан број b нека је

$$f(b) = \max_{x\in\mathbb{R}} \left| \sin x + \frac{2}{3+\sin x} + b \right|.$$

Одредити $\min_{b\in\mathbb{R}} f(b)$.

3. Нека су $m, n \geqslant 2$ природни бројеви и $A = (a_1, \ldots, a_m)$ уређена m-торка, а $B = (b_1, \ldots, b_n)$ уређена n-торка комплексних бројева различитих од 0. У једном кораку могуће је извршити једну од следећих операција:

1° Изабрати $1 \leqslant i < j \leqslant m$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бројеве a_i и a_j заменити бројевима za_i и $\frac{a_j}{z}$, редом.

2° Изабрати $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бројеве b_i и b_j заменити бројевима zb_i и $\frac{b_j}{z}$, редом.

3° Изабрати $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бројеве a_i и b_j заменити бројевима za_i и zb_j, редом.

Може ли се применом коначно много ових операција од A и B добити m-торка $\overline{A} = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m})$ и n-торка $\overline{B} = \left(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}\right)$, редом?

4. За сваки природан број n са $p(n)$ означен је број квадратних функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ чији су корени цели бројеви и $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да за $n \geqslant 4$ важи $n < p(n) < n^2$.

5. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао. Нека је $\{P_1\} = AB \cap ED$, $\{P_2\} = BC \cap EA$, $\{P_3\} = CD \cap BA$, $\{P_4\} = DE \cap CB$ и $\{P_5\} = EA \cap DC$. Кружнице описане око троуглова P_1AE, P_2BA, P_3CB, P_4DC и P_5ED секу се у тачкама A', B', C', D' и E' различитим од тачака A, B, C, D и E. Доказати да су тачке A', B', C', D' и E' концикличне.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.