

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да за све векторе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ важи

$$\begin{aligned} & \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} \\ = & (\vec{c} + \vec{a}) \times (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a}). \end{aligned}$$

2. Ако је r полупречник основе и H висина праве кружне купе, а ρ полупречник сфере уписане у ту купу, доказати да важи $\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{\rho H}$.
3. Одредити све $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ који су решења система

$$\begin{aligned} \cos x &= 2 \cos^3 y, \\ \sin x &= 2 \sin^3 y. \end{aligned}$$

4. Нека су M, N, P, Q колинеарне тачке, тако да важи $M - N - P - Q$ и $MN = 4$, $NP = 2$, $PQ = 6$. Нека је T тачка ван праве MN из које се дужи MN, NP, PQ виде под једнаким углом α . Одредити могуће вредности α .
5. На питање који му је број куће, Перица је одговорио следеће:

Ако је мој број куће дељив са 3, онда је то број између 50 и 59.

Ако мој број куће није дељив са 4, онда је то број између 60 и 69.

Ако мој број куће није дељив са 6, онда је то број између 70 и 79.

Који је Перицин број куће?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.