ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Трећи разред, А категорија

1. Доказати да је природан број $n \geqslant 4$ прост ако и само ако

$$n \mid \sum_{k=1}^{n-3} (k \cdot k!).$$

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{2010} \in \mathbb{C}$ све нуле полинома $x^{2010} + 20x + 2$. Израчунати

$$x_1^{2011} + x_2^{2011} + \ldots + x_{2010}^{2011}.$$

3. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Испитати истинитост тврђења:

> Ако за међусобно различите комплексне бројеве $z_1, z_2, \ldots, z_n$ за које је $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n|$ важи $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$, тада су тачке одређене комплексим бројевима $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (у неком поретку) темена правилног n-тоугла.

4. Колико има подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, 10\}$ који не садрже три узастопна природна броја?

5. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао. Нека је $\{P_1\} = AB \cap ED$, $\{P_2\} = BC \cap EA$, $\{P_3\} = CD \cap BA$, $\{P_4\} = DE \cap CB$ и $\{P_5\} = EA \cap DC$. Кружнице описане око троуглова P_1AE, P_2BA, P_3CB, P_4DC и P_5ED секу се у тачкама A', B', C', D' и E' различитим од тачака A, B, C, D и E. Доказати да су тачке A', B', C', D' и E' концикличне.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.