

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Други разред, А категорија

1. Нека је $ABCDE$ правилан петоугао. Пресечне тачке његових дијагонала чине правилан петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$. Одредити однос површина ова два петоугла.
2. На турниру учествује $n \geq 2$ играча. Предвиђено је да свака два играча одиграју по једну партију. Међутим, играч A је напустио турнир након k одиграних партија ($1 \leq k \leq n - 3$), а играч B након једне одигране партије. Остали играчи нису напустили турнир. На турниру је одиграно 55 партија. Да ли су A и B играли међусобно?
3. Нека су M, N, P, Q колинеарне тачке, тако да важи $M - N - P - Q$ и $MN = 4$, $NP = 2$, $PQ = 6$. Нека је T тачка ван праве MN из које се дужи MN, NP, PQ виде под једнаким углом α . Одредити могуће вредности α .
4. Одредити све природне бројеве n за које постоји полином са целим коефицијентима $p(x)$ такав да је $p(d) = \frac{n}{d}$ за сваки позитиван делилац d броја n .
5. Нека су a, b реални бројеви из интервала $(0, 1)$. Доказати да је $a^2 + b^2 = 1$ ако и само ако је

$$\frac{a^4 + b^4 - 1}{a^6 + b^6 - 1} = \frac{2}{3}.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.