ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је
$$P(x) = \left(x^{2009} - 2009\right) \cdot \left(x^{2008} - 2008\right) \cdot \ldots \cdot \left(x^{1} - 1\right).$$
Одредити све $a \in \mathbb{C}$ такве да $(x-a)^2 \mid P(x)$.

2. Кружнице k_1 и k_2 се секу у тачкама A и B. Тангента на k_1 у A и тангента на k_2 у B се секу у тачки M. Произвољна права кроз A сече кругове k_1 и k_2 у тачкама X и Y (различитим од тачке A), редом. Ако је $BY \cap MX = P$ и $MA \cap k_2 = Q \neq A$, доказати да је $PQ \parallel XY$.

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати да важи
$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a.$$

4. Одредити све природне бројеве a, b, c, тако да важи
$$4 \mid a+b \qquad \text{и} \qquad a^2 - 2a = b^2 + c^2.$$

5. Одредити најмање n са особином да ма како се постави n дама на шаховску таблу димензија 2009×2009, може се изабрати 2009 дама, тако да се никоје две од њих не нападају.

Напомена. На једном пољу табле може се налазити само једна дама. Дама напада фигуру ако се налазе у истој врсти, у истој колони или на истој (не нужно главној) дијагонали.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.