

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

Други разред, Б категорија

1. Свежи краставци садрже 99% воде. Ако свежи краставци преноће, ујутру садрже 98% воде. Ако је увече у продавници остављено 100 килограма свежих краставаца, колико ће килограма ујутру бити за продају?
2. Нека су P и Q средишта страница AB и AC , редом, једнакостраничног троугла ABC . Нека је R пресечна тачка праве PQ и описане кружнице $\triangle ABC$, тако да је $P - Q - R$. Доказати да је $\frac{PQ}{QR} = \frac{PR}{PQ}$.
3. Који је од бројева $a = \log_3 10$ и $b = \log_4 17$ већи?
4. Нека је $a \in \mathbb{R}$ и функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = ax^2 + x + 1.$$

Одредити све вредности параметра a , тако да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$f(f(x)) \geq 0.$$

5. У скупу реалних бројева решити једначину

$$28 \cdot 3 \cdot 2009 = 28^x \cdot 3^{x^2} \cdot 2009^{x^3}.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.