ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

Трећи разред, А категорија

1. Доказати да полином

$$P(x) = (x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1)^{2008} = a_{8032}x^{8032} + a_{8031}x^{8031} + \ldots + a_1x + a_0$$

има бар два негативна коефицијента.

2. Кружнице k_1 и k_2 се секу у тачкама A и B. Тангента на k_1 у A и тангента на k_2 у B се секу у тачки M. Произвољна права кроз A сече кругове k_1 и k_2 у тачкама X и Y (различитим од тачке A), редом. Ако је $BY \cap MX = P$ и $MA \cap k_2 = Q \neq A$, доказати да је $PQ \parallel XY$.

3. Нека је $n \geqslant 3$ природан број и нека су $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ ненегативни реални бројеви такви да је $x_0 = x_1 = 0$, $x_n = x_{n+1} = 1$. Доказати да постоји $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ за које важи:

$$|x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j| \geqslant \frac{4}{n^2}\,.$$

4. Одредити све природне бројеве a, b, c, тако да важи

$$4 \mid a + b \qquad \text{и} \qquad a^2 - 2a = b^2 + c^2.$$

5. Четири детета имају чоколаду правоугаоног облика са 10 редова и по 6 коцкица у реду. Свако дете држи чоколаду за један угао, и жели да поједе парче у облику правоугаоника (са страницама паралелним ивицама чоколаде) које садржи тај угао. На колико начина је могуће одломити таква четири парчета, ако чоколада може да се ломи само по линијама између коцкица?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.