

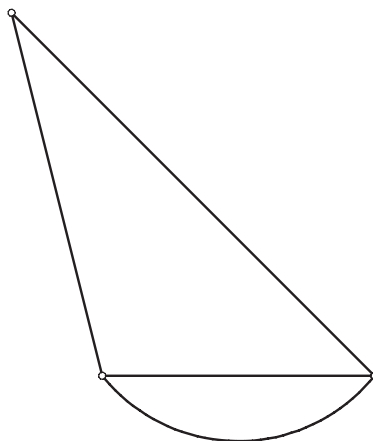
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

Први разред, А категорија

1. Колико има функција $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ таквих да за свако $x \in \mathbb{R}^+$ важи

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}?$$

2. Нека тачка C припада дужи AB и нека су k_0 , k_{01} и k_{02} кругови чији су пречници AB , AC и CB , редом. Нека је D тачка пресека кружнице k_0 и нормале кроз C на дуж AB . Нека су k_1 и k_2 кругови који се налазе у истој полуравни одређеној правом AB у којој и тачка D и који додирују, редом, кружнице k_{01} , k_0 и дуж CD , односно кружнице k_{02} , k_0 и дуж CD . Нека је k круг најмањег полупречника који садржи и додирује кругове k_1 и k_2 . Доказати да је пречник круга k једнак дужини дужи CD .
3. На кружници је уочен коначан број лукова, таквих да је дужина сваког од њих мања од полуобима кружнице и да свака три од њих имају непразан пресек. Доказати да постоји тачка кружнице која се не налази ни на једном луку.
4. Конструисати барем једну праву која фигуру са слике, састављену од троугла и кружног одсечка, дели на два по површини једнака дела.



5. Да ли постоји природан број који је потпун квадрат и чији је збир цифара једнак 2008^{2009} ?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.