ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Четврти разред, Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a, тако да једначина

$$x^3 - 3x^2 - 9x = a$$

има три реална и међусобно различита решења.

2. Дата је зарубљена купа у коју се може уписати лопта. Површина омотача те зарубљене купе је четири пута већа од разлике површина основа. Одредити однос запремина лопте и зарубљене купе.

3. Нека је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан са $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ и $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ за $n \in \mathbb{N}$. Нека је

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \frac{x_1}{3^1} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \frac{x_4}{3^4} + \dots .$$

Доказати да је број S коначан и израчунати га.

4. Нека је P површина троугла, а R полупречник његове описане кружнице. Доказати да важи неједнакост

$$P \leqslant \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\,.$$

Када се у претходној неједнакости достиже једнакост?

5. Одредити све вредности реалног параметра a за које је скуп решења неједначине

$$\log_{x+a}\left(x^2 + a^2\right) \geqslant 2$$

коначан.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.