ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Четврти разред, А категорија

1. **(а)** Доказати да за $y \geqslant 2$ важи $2e^y > y^3 + 4$.

(б) Доказати да је функција $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x) = \ln\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)$$

конвексна.

2. У неправоуглом троуглу ABC, тачка H је ортоцентар, а тачке D, E и F су подножја висина из темена A, B и C, редом. Нека је X пресек правих AH и EF, а Y пресечна тачка кружница описаних око троугла AHC и EBC, различита од C. Доказати да су тачке C, X и Y колинеарне.

3. Одредити последње две цифре броја $2^{2^p} + 1$, где је p прост број.

4. Нека је $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3}$. Одредити све полиноме p са целобројним коефицијентима, за које важи

1° $p(x) = p(\varepsilon x)$ за свако $x \in \mathbb{C}$;

2° $p(1) = 2001$;

3° $p(2) = 2009$.

5. Одредити највећи могући број ловаца који се могу сместити на шаховску таблу димензија 7×7, тако да сваки од њих напада парно много других ловаца.

Напомена. Ловац напада фигуру ако се налазе на истој (не нужно главној) дијагонали и ако се између њих не налази још нека фигура.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.