

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $n > 2$ природан број. Доказати да важи $\sin \frac{\pi}{n} > \frac{3}{\sqrt{n^2 + 9}}$.

2. Нека су a, b и c комплексни бројеви, тако да тачке које им одговарају у комплексној равни представљају темева једнакостраничног троугла. Доказати да једначина

$$az^2 + bz + c = 0$$

у скупу комплексних бројева има бар једно решење јединичног модула.

3. Нека је S центар уписане кружнице оштроуглог троугла ABC . Уписана кружница додирује страницу AB тачки X . Права XS сече уписану кружницу у тачки M (различитој од X). Нека је X' пресечна тачка праве CM и странице AB , а L тачка на дужи $X'C$, тако да важи $X'L = CM$. Доказати да су тачке A, L, S колинеарне ако и само ако важи $AB = AC$.

4. Одредити највећи заједнички делилац свих елемената скупа

$$\{n^{13} - n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

5. Одредити највећи могући број ловаца који се могу сместити на шаховску таблу димензија 7×7 , тако да сваки од њих напада парно много других ловаца.

Напомена. Ловац напада фигуру ако се налазе на истој (не нужно главној) дијагонали и ако се између њих не налази још нека фигура.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.